**2.1 条件概率的定义** 2020年1月6日09点58分

**定义2.1.1 条件概率** 假设我们已知事件发生并且我们想要计算另一事件在事件已经发生的概率.新事件的概率则被称为*事件在事件已经发生的条件概率[conditional probability of the event A given that the event B has occurred]*,标记为.如果,则条件概率为

当时,条件概率未定义.

**例题2.1.1和2.1.2** 彩票获奖概率

**例题2.1.3** 两个色子点数之和问题

**例题2.1.4** **临床试验**在条件概率中的应用

**例题2.1.5** 重复掷色子(**该问题有点绕,需要认真想才能明白**)

**定理2.1.1 条件概率的乘法法则** 设A和B是事件。如果,则

如果,则

**例题2.1.6** 从箱子中选择两个球

**定理2.1.2 条件概率的乘法法则** 假设事件,...,满足则

**例题2.1.7** 从箱子中选择四个球

定理2.1.3 假设事件,...,满足.则

**条件概率和分割**

**定义2.1.2 分割** 设是某实验的样本空间,考虑中个不相交事件并且那么则称这些事件构成了的一个*分割[partition]*.

**定理2.1.4 全概率定律** 假设事件构成空间的一个分割并且对于任意成立.那么对于中的每一个事件,存在

**例题2.1.8,2.1.9** 从两个盒子中选择长螺栓

**例题2.1.10** 两次测验,后一次比前一次得分高的概率(**经典**)

**总概率定律的条件概率**:

**增强实验** 在某些实验中,从实验的初始描述中可能并不清楚会存在有助于计算概率的分割.但是,如果我们认为实验具有一些额外结构,则在许多此类实验中都存在这样的分割.(**增强实验二次阅读依然理解不够透彻**)

**例题2.1.11** 从两个盒子中选择长螺栓

**例题2.1.12** 临床试验:阐述增强实验的通用性概念

**定义2.1.3 增强实验** 如果需要,可以扩大任何实验的范围,以包括对我们认为有用的尽可能多的附加信息的潜在或假设观察,以帮助我们计算所需的任何概率.

**例题2.1.13** 临床试验(**该例题没有看懂**)

**掷色子游戏[The Game of Craps]** 很经典的一道求获胜概率的例题，与**例题2.1.5**和分割有关,求解过程很精彩很透彻.

**习题11**:证明,其中

**2.2 独立事件** 2020年1月13日10点16分

**例题2.2.1** 抛硬币 展示独立事件特征

**定义2.2.1 独立事件** 两个事件和是独立的仅当

假设和.从独立事件和条件概率的定义可以简单得出和是独立的当且仅当和.

**例题2.2.2** 机器运转失灵 根据独立事件计算概率

**例题2.2.3** 掷色子 应用**定义2.2.1**

**定理 2.2.1** 如果两个事件和是独立的,则事件与,与,与同样也是独立事件.

证明:

**定义2.2.2 (互相)独立事件** 个事件是独立的(或相互独立的),对于这些事件的任意子集(),存在

.

**例题2.2.4** 成对独立 对定理2.2.2的阐述

**例题2.2.5** 检查零件 独立事件的应用

**感想** **例题2.2.5**包含一个更一般的问题(二项分布):设个零件中恰好有个零件损坏的事件为,其中,且零件损坏的概率为,则子集的数量为,设中每一个子集为.**例题2.2.5**已经假设子集之间互不相交以及每个子集发生的概率.总概率.该问题最后一步是假设的子集互不相交，即.证明是显而易见的：由于和是中互不相同的均有个不同元素的集合, 显然的交集至多包含个元素,因此.

2020年1月19日更新:以上的理解不正确,之所以是独立的是因为其内部每个元素是独立的，这点可以通过例题2.2.1来类比：硬币抛两次类比个零件,硬币出现正面的概率类比零件损坏的概率,正面出现的次数类比零件损坏的个数.

**例题2.2.6** 检查零件 独立事件的应用(比**例题2.2.5**简单)

**例题2.2.7** 抛硬币直到头像出现未知

**例题2.2.8** 每次检查一个零件

**例题2.2.9** 根据一起案件改编的概率题，非常有意思

**定理2.2.2** 设事件满足.则是独立的当且仅当,对于任意两个不相交的子集和,我们有(**该定理需要手动证明**)

**定理2.2.3** 设,是互斥事件.则这些事件是互斥独立的当且仅当所有事件除了其中一个,其余概率均为0.

**定义2.2.3** 条件独立 如果事件的任意子集满足

其中是给定事件,我们称这组事件在给定是条件独立的.

**定理2.2.4** 假设事件满足.则和在给定是条件独立的当且仅当

**证明**:根据定义2.2.3**,**和在给定是条件独立的必要条件是

即只要从公式推导出,则和在给定是条件独立的.

因为,所以也必须大于0.

因此必要条件得证.充分条件也是反向推导即可.

**卡片收集问题** 是**例题2.2.5**高级扩展,有**实际应用价值**.

**2.3 贝叶斯定理** 2020年1月14日09点25分

**例题2.3.2** 检选择长螺丝,根据观察结果推测零件的来源的概率

**定理2.3.1 贝叶斯定理** 假设事件构成空间的一个分割并且对于任意成立.设事件满足.则对于任意,

**例题2.3.3** 检验疾病 根据检测结果和疾病的发生率来推测实际感染疾病的可能性

**例题2.3.4** 确定损坏零件的来源,与**例题2.3.3**类似

**例题2.3.5** 鉴别基因(**没有仔细读**)

**给定条件的贝叶斯定理**,对于给定事件:

**计算多阶段的后验概率** 该例题是对公式的详细阐述,非常值得反复阅读

**例题2.3.5** 研究比例,对后验概率的更进一步说明

**例题2.3.5** 临床试验 是的后续,对贝叶斯定理的应用和后验概率更深入地描述,**其中有许多细节需要注意**.